Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIV**, 2.

KLEINERE BEITRÄGE ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN VI

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1936

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Der Picardsche Satz.

Die vorliegende Note behandelt eine Frage aus der Theorie der analytischen fastperiodischen Funktionen $f(s)$ einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$. Die allgemeine Theorie dieser Funktionen sowie ihrer Dirichletentwicklungen $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ wurde in der Abhandlung »Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III« (Acta Mathematica Bd. 47) entwickelt.

Ich erinnere an die Definition: Eine im Streifen $(-\infty \leqq)$ $\alpha < \sigma < \beta\ (\leqq +\infty)$ analytische Funktion $f(s)$ heisst fastperiodisch in $\alpha < \sigma < \beta$ oder kürzer »fastperiodisch in (α, β)«, falls es zu jedem ε eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen, d. h. reellen Zahlen τ gibt, welche für alle s des genannten Streifens der Ungleichung $|f(s+i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$ genügen.

Ferner wurde eine in $\alpha < \sigma < \beta$ reguläre Funktion »fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$« bzw. »fastperiodisch in $[\alpha, \beta)$« genannt, falls sie in jedem beiderseits beschnittenen Streifen $(\alpha <)$ $\alpha_1 < \sigma < \beta_1\ (< \beta)$ bzw. in jedem einseitig beschnittenen Streifen $(\alpha <)\ \alpha_1 < \sigma < \beta$ fastperiodisch ist.

Für eine in einer rechten Halbebene $[\alpha, \infty]$ fastperiodische Funktion

$$f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$$

habe ich in der genannten Abhandlung betreffs ihres Verhaltens im »Punkt $\sigma = \infty$« die folgenden Tatsachen dargetan, die ein klassisches Resultat über reinperiodische Funktionen auf fastperiodische Funktionen verallgemeinern.

Es bestehen für das Verhalten der Funktion $f(s)$ für $\sigma \to \infty$ genau drei Möglichkeiten, die als der reguläre, der polare und der wesentlich singuläre Fall zu bezeichnen sind.

I. Die Funktion $f(s)$ strebt für $\sigma \to \infty$ gleichmässig in t einem endlichen Grenzwerte Γ zu, und es ist in diesem Fall $f(s)$ nicht nur in $[\alpha, \infty]$, sondern sogar in $[\alpha, \infty)$ fastperiodisch. Dieser »reguläre Fall« tritt dann und nur dann ein, wenn die Dirichletexponenten der Funktion alle $\leqq 0$ sind, und der genannte Grenzwert Γ ist gerade das konstante Glied der Dirichletentwicklung von $f(s)$ (d. h. natürlich der Wert Null, falls alle Exponenten negativ sind). Was das nähere Verhalten von $f(s)$ für $\sigma \to \infty$ betrifft, so sind hier zwei Unterfälle zu unterscheiden:

I^a^. Falls unter den negativen Exponenten Λ_n kein absolut kleinster vorkommt, nimmt die Funktion $f(s)$ in jeder rechten Halbebene $\sigma > \sigma_0$ den Grenzwert Γ an.

I^b^. Falls es dagegen unter den negativen Exponenten Λ_n einen absolut kleinsten gibt, wird bei hinreichend grossem σ_0 der Grenzwert Γ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ nirgends angenommen.

II. Der absolute Betrag von $f(s)$ strebt für $\sigma \to \infty$ gegen Unendlich und zwar gleichmässig in t. Dieser »polare Fall« tritt dann und nur dann ein, wenn es positive Exponenten Λ_n gibt und unter ihnen einen grössten, etwa Λ_N. Genauer gilt, dass die Funktion $f(s)$ sich asymptotisch wie das Glied $A_N e^{\Lambda_N s}$ verhält, d. h. es gilt gleichmässig in t die Limesgleichung $\lim\limits_{\sigma \to \infty} f(s)\, e^{-\Lambda_N s} = A_N$.

III. Die Funktion $f(s)$ nimmt in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ Werte an, die in der ganzen komplexen Ebene überall dicht liegen. Dieser »wesentlich singuläre Fall« tritt dann und nur dann ein, wenn es positive Exponenten Λ_n gibt, unter ihnen aber keinen grössten. Wie im Fall I sind auch hier zwei Unterfälle zu unterscheiden:

III^a. Falls die Menge der positiven Exponenten Λ_n beschränkt ist (ohne dass aber ihre obere Grenze selbst zur Exponentenmenge gehört), so nimmt die Funktion $f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ jeden Wert ohne irgendwelche Ausnahme an.

III^b. Falls dagegen die Menge der positiven Exponenten nicht nach oben beschränkt ist, kann (wie schon der Spezialfall der reinperiodischen Funktionen lehrt) natürlich nicht allgemein behauptet werden, dass $f(s)$ sämtliche Werte annimmt. Wohl aber gilt als Verallgemeinerung des klassischen Picardschen Satzes, dass $f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ sämtliche Werte mit höchstens einer einzigen Ausnahme annimmt.

Die zum Beweise der verschiedenen oben angeführten Tatsachen verwendeten allgemeinen funktionentheoretischen Hilfsmittel waren alle relativ einfacher Art bis auf diejenigen, welche zur Begründung der unter III^b genannten Verallgemeinerung des Picardschen Satzes herangezogen wurden. Die einfache und sinnreiche Methode, durch welche Lindelöf für den klassischen Fall lauter ganzzahliger Exponenten den Beweis des Picardschen Satzes durch Verwendung eines fundamentalen Satzes von Schottky erbringen konnte, liess sich nämlich nicht auf den Fall der fastperiodischen Funktionen übertragen, und der Verf. sah sich daher genötigt, um den Picardschen Satz für beliebige fastperiodische Funktionen zu beweisen, einen recht tiefliegenden Satz »geometrischer« Art heranzuziehen, welcher von Iversen durch das Studium der inversen Funktion einer analytischen Funktion gefunden war. Neuerdings ist es aber dem Verfasser gelungen, eine Variante des Lindelöfschen Beweises des klassischen Picardschen Satzes zu finden, welche im Gegensatz zu dem ursprünglichen Lindelöfschen Beweise auf den fastperiodischen Fall übertragbar ist. Dadurch ergibt sich ein neuer Beweis des Picardschen Satzes für fastperiodische Funktionen, welcher wesentlich einfacher ist als der in der anfangs zitierten Arbeit gegebene. Diesen neuen Beweis mitzuteilen ist der Zweck der vorliegenden Note.

Die genannte Variante des Lindelöfschen Beweises — sowie eine daraus folgende allgemein-funktionentheoretische (d. h. von der Theorie der fastperiodischen Funktionen unabhängige) Verallgemeinerung des Picardschen Satzes — habe ich in einer Note »Zum Picardschen Satz« in der Herrn Gravé gewidmeten Festschrift auseinandergesetzt. Sie basiert auf dem folgenden funktionentheoretischen Lemma, welches unter Benutzung einer einfachen konformen Abbildung aus einer bekannten von Landau herrührenden Verschärfung des oben erwähnten Schottkyschen Satzes abgeleitet werden kann.

Lemma: Es seien a und b $(\neq a)$ zwei komplexe Zahlen und k eine positive Grösse. Dann gibt es eine positive Konstante $K = K(a, b, k)$ mit der folgenden Eigenschaft: Jede in der Halbebene $\sigma > 0$ reguläre und von a und b verschiedene Funktion $f(s)$, welche auf der Geraden $\sigma = 1$ die Ungleichung

$$| f(s) | < k$$

befriedigt, genügt in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$ der Ungleichung

$$| f(s) | < e^{K\sigma}.$$

Aus diesem Lemma, für dessen Beweis ich auf die letztzitierte Arbeit verweise, folgt der PICARDsche Satz für fastperiodische Funktionen — den wir nochmals explizite als »Satz« formulieren — in wenigen Worten.

Satz. Es sei $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \alpha$ regulär und in $[\alpha, \infty]$ fastperiodisch, und es besitze die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ von $f(s)$ beliebig grosse positive Exponenten Λ_n. Dann nimmt die Funktion $f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_0$ alle Werte mit höchstens einer einzigen Ausnahme an.

Beweis: Wir nehmen den Satz als falsch an, d. h. dass es ein $\sigma_0 > \alpha$ sowie zwei Werte a und $b\,(\neq a)$ derart gäbe, dass $f(s) \neq a$ und $\neq b$ für $\sigma > \sigma_0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\sigma_0 = 0$ angenommen werden; sonst ersetze man nur $f(s)$ durch $f(s + \sigma_0)$. Auf der Geraden $\sigma = 1$ ist $f(s)$ beschränkt, etwa $| f(s) | < k$, einfach weil die Funktion $F(t) = f(1 + it)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen t ist. Zu den Werten a, b und k bestimmen wir eine positive Konstante K im Sinne des obigen Lemmas. Dann würde in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$ die Ungleichung

$$| f(s) | < e^{K\sigma}$$

gelten. Nunmehr wählen wir in der Dirichletentwicklung von $f(s)$ ein Glied $A_N e^{\Lambda_N s}$, dessen Exponent Λ_N grösser als diese Konstante K ist. Für jedes $\sigma > 0$ gilt

$$\underset{t}{M}\left\{f(\sigma+it)\,e^{-i\Lambda_N t}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(\sigma+it)\,e^{-i\Lambda_N t}\,dt = A_N\,e^{\Lambda_N\sigma},$$

und es ist also a fortiori

$$\underset{-\infty<t<\infty}{\text{Obere Grenze}}\ |f(\sigma+it)| \geqq |A_N|\,e^{\Lambda_N\sigma}.$$

Diese für alle $\sigma > 0$ gültige Ungleichung steht aber (wegen $\Lambda_N > K$) in offenbarem Widerspruch zu der obigen, unter der zu widerlegenden Annahme $f(s) \neq a, b$ für $\sigma > 1$ abgeleiteten Ungleichung

$$|f(\sigma+it)| < e^{K\sigma},$$

womit der Satz dargetan ist.

Forelagt paa Mødet den 1. Maj 1936.
Færdig fra Trykkeriet den 15. Juni 1936.